

## Analisis Solusi Spatial dan Temporal Persamaan NLS (*Nonlinear Schrödinger*) Sebagai Solusi Soliton Menggunakan Metode DVR (Discrete Variable Representation)

Irvan Maulana, Zulfi Abdullah

Laboratorium Teori dan Nuklir, Jurusan Fisika,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas  
Kampus Unand Limau Manis, Padang, 25163, Indonesia

Info Artikel	ABSTRAK
<p><b>Histori Artikel:</b></p> <p>Diajukan: 8 Oktober 2019 Direvisi: 16 Oktober 2019 Diterima: 23 Oktober 2019</p>	<p>Analisis solusi persamaan Schrödinger Nonlinear (NLS) dengan menggunakan metode Representasi variabel Diskrit (DVR) telah dilakukan. Penggunaan metode DVR ini dilakukan dengan mengkonstruksikan fungsi basis melalui interpolasi Lagrange dan koefisien spektral yang berdasarkan polinomial Chebyshev pada titik Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL). Hasil simulasi dari metode DVR ini memiliki bentuk yang sama dengan 2 jenis solusi eksak persamaan NLS yaitu <i>Cubic Nonlinear Schrödinger</i> (CNLS) dan <i>Generalized Nonlinear Schrödinger</i> (GNLS), namun memiliki rentang penalaran yang berbeda. Perbedaan rentang tersebut dikarenakan adanya kondisi awal yang ditetapkan pada metode DVR ini. Penggunaan metode DVR pada pengkondisian CNLS menghasilkan bentuk soliton onsite, sedangkan pada pengkondisian GNLS dihasilkan bentuk soliton onsite namun memiliki amplitudo yang berbeda pada setiap perubahan posisi dan waktu.</p>
<p><b>Kata kunci:</b></p> <p>chebyshev-gauss-lobatto representasi variabel diskrit <i>cubic nonlinear schrödinger</i> <i>generalized nonlinear schrödinger</i> soliton</p>	
<p><b>Keywords:</b></p> <p><i>chebyshev-gauss-lobatto</i> <i>discrete variable representation</i> <i>cubic nonlinear schrödinger</i> <i>generalized nonlinear schrödinger</i> soliton</p>	
<p><b>Penulis Korespondensi:</b></p> <p>Irvan Maulana Email: <a href="mailto:irvan4318@gmail.com">irvan4318@gmail.com</a></p>	<p><i>Analysis of Nonlinear Schrödinger (NLS) equation by using Discrete Variable Representation (DVR) method has been carried out. The DVR method done with built basic function from Lagrange interpolation and spectral coefficient from Chebyshev polynomial in Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL) point. The result of DVR method simulation has same form with 2 type of exact solution of NLS equation are Cubic Nonlinear Schrödinger (CNLS) and Generalized Nonlinear Schrödinger (GNLS), however the result has different distance of propagation. That difference distance caused by initial condition which set on this method. The using of DVR method in CLNS condition produce soliton onsite form, but for GNLS condition produce soliton onsite form too but it has different amplitude for every change of position and time.</i></p>

Copyright © 2020 Author(s). All rights reserved

### 1. PENDAHULUAN

Soliton adalah gelombang nonlinear yang dapat mempertahankan bentuknya selama penalaran selama selang waktu tertentu dengan kecepatan konstan. Soliton terjadi disebabkan oleh efek nonlinear dan efek dispersif dalam medium (Wadati, 2001). Soliton pada umumnya dideskripsikan melalui persamaan diferensial parsial nonlinear. Beberapa persamaan yang dapat mendeskripsikan fenomena soliton adalah persamaan Korteweg-de Vries (Theodorakopoulos, 2006), persamaan Camassa-Holm

(Debnath, 2012), persamaan Sine-Gordon (Zhou, 2017), persamaan Degasperis-Procesi (Debnath, 2012), dan persamaan Schrödinger nonlinear (Agrawal, 2001). Penelitian ini akan difokuskan pada persamaan Schrödinger Nonlinear / Nonlinear Schrödinger (NLS). Persamaan NLS dapat menjelaskan banyak fenomena nonlinear termasuk fiber optik nonlinear (Agrawal, 2001), model dinamika protein (Fordy, 1990), fisika plasma (Stenflo dan Yu, 1997), single fokus pada pulsa laser (Sulem dan Sulem, 1999) dan banyak bidang lainnya.

Persamaan NLS memiliki bentuk umum seperti pada Persamaan (1) :

$$i\Psi_t + a\Psi_{xx} + b|\Psi|^2\Psi + F(x,t)\Psi = 0 \quad (1)$$

dimana  $a$  dan  $b$  merupakan konstanta,  $F$  merupakan fungsi terikat,  $\Psi$  merupakan fungsi gelombang kompleks,  $\Psi_t$  merupakan turunan orde-1 dari  $\Psi$  terhadap  $t$ , dan  $\Psi_{xx}$  merupakan turunan  $\Psi$  orde-2 dari terhadap  $x$ .

Pada penelitian ini akan dibahas dua kondisi persamaan NLS, yaitu *Cubic Nonlinear Schrödinger* (CNLS) dan *Generalized Nonlinear Schrödinger* (GNLS). Persamaan CNLS dan GNLS ini didapatkan dari variasi nilai  $f(x,t)$  pada Persamaan (1). Dalam beberapa tahun terakhir telah banyak upaya dilakukan untuk memecahkan persamaan NLS tersebut. Berbagai metode numerik telah digunakan seperti metode spektral (Bao dkk, 2003), metode beda hingga (Delfour dkk, 1981), metode elemen berhingga (Dag, 1999), dan banyak metode lainnya. Metode Spektral dapat menjadi solusi persamaan differensial biasa, differensial parsial, dan untuk menentukan nilai eigen suatu fungsi (Canuto dkk, 1988). Metode ini dapat menjadi solusi *Partial Differential Equations* (PDE) bergantung waktu karena akurasi spasial spektralnya. Salah satu jenis metode spektral adalah metode Discrete Variable Representation (DVR).

Pada kasus nonlinear yang sangat rumit, metode DVR / pseudo-spektral lebih cocok digunakan daripada metode spektral lain karena metode ini mudah untuk dibahasakan pada bahasa pemrograman dan algoritmanya mudah diverifikasi (Dehghan dan Taleei, 2009). Metode DVR ini dapat digunakan untuk mengkalkulasi elemen matriks dari permasalahan 1-dimensi dinamika kuantum dan diaplikasikan pada osilator anharmonik (Harris dkk, 1965). Diterapkannya metode DVR / Pseudo-Spektral pada variabel ruang dan waktu yang didasarkan pada titik Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL) telah dilakukan oleh Dehghan dan Taleei (2009). Penerapan CGL dengan metode DVR / Pseudo-Spektral pada persamaan difusi juga telah dilakukan oleh El-Baghdady dan El-Azab (2016). Penelitian yang dilakukan berdasarkan penelitian Dehghan dan Taleei. Namun pada penelitian ini akan diuraikan secara rinci penurunan persamaan NLS menggunakan metode DVR dan juga mencari solusi sistem nonlinier menggunakan metode Newton-Raphson.

## 2. METODE

### 2.1 Transformasi Persamaan NLS

Transformasi ini digunakan untuk mendapatkan kondisi batas yang homogen, dengan nilai : untuk posisi :

$$x \rightarrow \frac{x_R - x_L}{2}x + \frac{x_R + x_L}{2} \quad (2)$$

untuk waktu :

$$t \rightarrow \frac{T}{2}t + \frac{T}{2} \quad (3)$$

Dengan melakukan transformasi tersebut, maka persamaan (1) menjadi :

$$i\varphi_t + \alpha\varphi_{xx} + \beta|\varphi|^2\varphi + f(x,t)\varphi = 0, \quad x, t \in [-1,1] \quad (4)$$

dengan kondisi terikat :

$$\varphi(-1,t) = \varphi(1,t), t \in [-1,1] \quad (5)$$

dengan  $\alpha = \frac{2T}{(x_R - x_L)^2} a$ ,  $\beta = \frac{T}{2} b$ , dan  $f(x,t) = \frac{T}{2} F(x,t)$

selanjutnya didefinisikan bahwa :

$$\psi = \varphi - \Gamma \quad (6)$$

Dengan terpenuhinya kondisi yang homogen, dengan mensubstitusi persamaan (6) pada persamaan (4) kita dapat menulis :

$$i\psi_t + \alpha\psi_{xx} + \beta(|\psi + \Gamma|^2)(\psi + \Gamma) + i\Gamma_t + \alpha\Gamma_{xx} + f(x,t)(\psi + \Gamma) = 0 \quad (7)$$

dengan solusi :  $\psi(x,t) = u(x,t) + iv(x,t)$

$$\Gamma(x,t) = p(x,t) + iq(x,t)$$

dimana  $u, v, p$  dan  $q$  merupakan fungsi real. Substitusikan solusi tersebut pada persamaan (7), sehingga akan dihasilkan :

$$\begin{aligned} v_t - \alpha u_{xx} - \beta((u+p)^2 + (v+q)^2)(u+p) + q_t - \alpha p_{xx} - f(x,t)(u+p) &= 0 \\ u_t + \alpha v_{xx} - \beta((u+p)^2 + (v+q)^2)(v+q) + p_t + \alpha q_{xx} + f(x,t)(v+q) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Persamaan (8) merupakan sistem gelombang kompleks yang memiliki bagian real dan imajiner.

## 2.2 Metode DVR

Pada metode DVR, diaproksimasikan sebuah fungsi sebagai berikut :

$$u(x,t) \cong \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N \tilde{u}_{ij} h_{ij}(x,t) \quad (9)$$

dengan :  $h_{i,j}(x,t) = \Phi_i(x)\Phi_j(t)$  yang merupakan interpolasi Lagrange, dimana :

$$\Phi_i(x) = \prod_{n=0, n \neq i}^N \frac{x - x_n}{x_i - x_n} \quad \text{dan} \quad \Phi_j(t) = \prod_{m=0, m \neq j}^M \frac{t - t_m}{t_j - t_m}$$

Karena bentuknya yang sederhana, interpolasi ini terjadi pada titik Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL), yaitu :

$$\begin{aligned} x_i &= \cos(i\pi / N), i = 0(1)N \\ t_j &= \cos(j\pi / M), j = 0(1)M \end{aligned}$$

Selanjutnya Persamaan (9) dapat dituliskan menjadi :

$$u(x,t) = \left( \Phi_{[0:N]}(x) \otimes \Phi_{[0:M]}(t) \right)^T \mathbf{u} \quad (10)$$

dengan :

$$\tilde{u}_{ij} = \mathbf{u} = [u_{00}, \dots, u_{0M}, u_{10}, \dots, u_{1M}, \dots, u_{N0}, \dots, u_{NM}]^T, \quad \Phi_{[0:L]}(Q) = [\Phi_0(Q), \dots, \Phi_L(Q)]^T, \quad \text{dan} \quad \otimes$$

merupakan operator otimes yaitu perkalian tensor matriks.

Untuk setiap turunan ke- $n$  dari fungsi  $u(x,t)$  dapat dituliskan seperti berikut :

$$\frac{d^n u(x,t)}{dx^n} = \left( \Phi_{[0:N]}(x) \otimes \Phi_{[0:M]}(t) \right)^T \left( D_{[1:N+1,1:N+1]}^{(n)} \otimes I_{M+1} \right) \mathbf{u} \quad (11a)$$

$$\frac{d^n u(x,t)}{dt^n} = \left( \Phi_{[0:N]}(x) \otimes \Phi_{[0:M]}(t) \right)^T \left( I_{N+1} \otimes D_{[1:M+1,1:M+1]}^{(n)} \right) \mathbf{u} \quad (11b)$$

dengan  $D^{(n)}$  merupakan matriks differensiasi Chebyshev.

### 3. HASIL DAN DISKUSI

#### 3.1 Penggunaan Metode DVR pada Persamaan NLS

Pada penggunaan metode DVR, Persamaan : (10), (11a), dan (11b) akan disubstitusikan pada persamaan (8), sehingga dihasilkan :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \Phi_{[1:N-1]}(x) \otimes \Phi_{[1:M]}(t) \right)^T \left\{ \left( I_{N-1} \otimes D_{[1:M,1:M]} \right) \mathbf{v} - \alpha \left( D_{[2:N,2:N]}^2 \otimes I_M \right) \mathbf{u} \right\} \\ -\beta((u+p)^2 + (v+q)^2)(u+p) + q_t - \alpha p_{xx} - f(x,t)(u+p) + \zeta_2(x)\phi_0(t) \\ -\alpha(\gamma_1(t)\phi_0(x) + \gamma_2(t)\phi_N(x)) = 0 \\ \\ \left( \Phi_{[1:N-1]}(x) \otimes \Phi_{[1:M]}(t) \right)^T \left\{ \left( I_{N-1} \otimes D_{[1:M,1:M]} \right) \mathbf{u} - \alpha \left( D_{[2:N,2:N]}^2 \otimes I_M \right) \mathbf{v} \right\} \\ +\beta((u+p)^2 + (v+q)^2)(v+q) + p_t + \alpha q_{xx} + f(x,t)(v+q) + \zeta_1(x)\phi_0(t) \\ +\alpha(\lambda_1(t)\phi_0(x) + \lambda_2(t)\phi_N(x)) = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

karena nilai  $\Phi_N(x)$ ,  $\Phi_0(x)$  dan  $\Phi_0(t)$  sangat kecil sehingga dapat diabaikan, dan selanjutnya akan didapatkan sistem nonlinier :

$$F(U, V) = \left\{ \begin{array}{l} \left( I_{N-1} \otimes D_{[1:M,1:M]} \right) \mathbf{v} - \alpha \left( D_{[2:N,2:N]}^2 \otimes I_M \right) \mathbf{u} \\ -\beta I_{uv} (u+p) + (q_t - \alpha p_{xx}) - I_f (\mathbf{u} + p) = 0 \\ \\ \left( I_{N-1} \otimes D_{[1:M,1:M]} \right) \mathbf{u} - \alpha \left( D_{[2:N,2:N]}^2 \otimes I_M \right) \mathbf{v} \\ -\beta I_{uv} (v+q) + (p_t - \alpha q_{xx}) - I_f (\mathbf{v} + q) = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

dimana :  $\xi_i = (x_i, t_i), i = 1(1)N$

$$p = [p(\xi_1), \dots, p(\xi_1), \dots, p(\xi_{N-1}), \dots, p(\xi_{N-1})]^T$$

$$q = [q(\xi_1), \dots, q(\xi_1), \dots, q(\xi_{N-1}), \dots, q(\xi_{N-1})]^T$$

$$I_f = \text{diag}(f(\xi_1), \dots, f(\xi_1), \dots, f(\xi_{N-1}), \dots, f(\xi_{N-1}))$$

$$I_{uv} = \text{diag}((u+p)^2 + (v+q)^2)$$

Untuk memecahkan sistem nonlinier dapat digunakan metode Newton-Raphson. Dalam penggunaan metode ini diperlukan turunan orde-1 dari suatu fungsi, untuk mengatasi masalah tersebut dapat digunakan matriks Jacobi. Bentuk matriks jacobian dari sistem nonlinier adalah sebagai berikut :

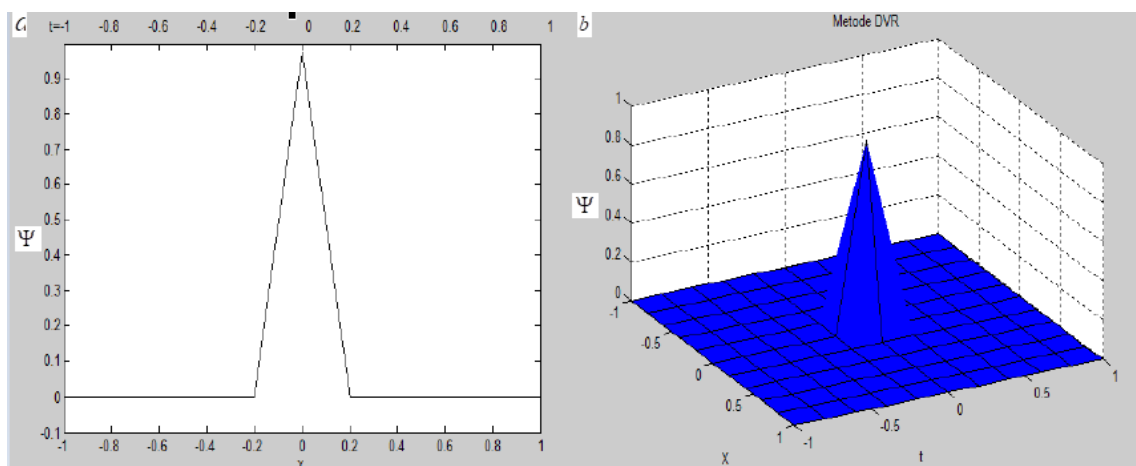
$$J = \begin{pmatrix} -\alpha \left( D_{[2:N,2:N]}^2 \otimes I_M \right) - \beta \left( 3I_{up}^2 + I_{vq}^2 \right) - I_f & \left( I_{N-1} \otimes D_{[1:M,1:M]} \right) - 2\beta I_{up} I_{vq} \\ \left( I_{N-1} \otimes D_{[1:M,1:M]} \right) - 2\beta I_{up} I_{vq} & \alpha \left( D_{[2:N,2:N]}^2 \otimes I_M \right) - \beta \left( I_{up}^2 + 3I_{vq}^2 \right) - I_f \end{pmatrix}$$

### 3.2 Simulasi pada CNLS (*Cubic Nonlinear Schrödinger*)

Persamaan CNLS didapatkan dengan memberikan nilai untuk  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $F = 0$ , sehingga Persamaan (1) menjadi :

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi \quad (14)$$

Hasil yang didapatkan dari simulasi keadaan ini adalah sebagai berikut :



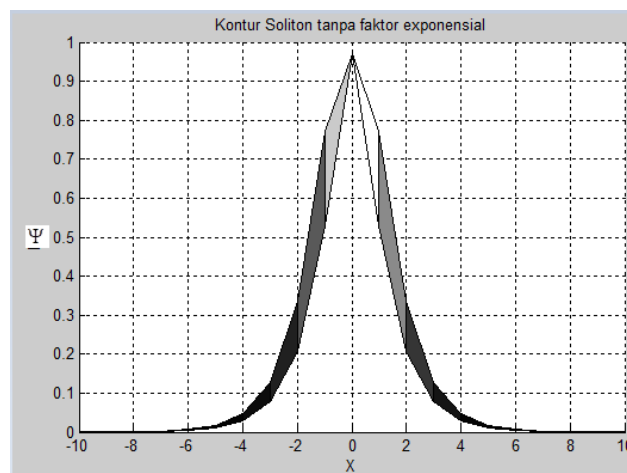
**Gambar 1** Metode DVR pada CNLS: (a) Plot nilai fungsi, (b) Surface fungsi.

Pada Gambar 1a merupakan hasil dari penggunaan metode DVR. Dapat dilihat bahwa nilai maksimum yang dicapai untuk nilai  $\Psi$  adalah 1, sedangkan untuk nilai minimum adalah nol. Bentuk yang dihasilkan dari Gambar 1a ini serupa dengan bentuk salah satu jenis soliton, yaitu soliton *onsite*. Pada Gambar 1b merupakan penggambaran 3D dari Gambar 1a. Dapat dilihat dari Gambar 1b bahwa  $\Psi$  mengalami perubahan nilai pada saat  $t = -0,2$  dan memuncak (bernilai 1) pada saat  $t = 0$  dan meluruh kembali sampai  $t = 0,2$ .

Selanjutnya akan disimulasikan solusi eksak dari CNLS. Diketahui bahwa solusi eksak dari persamaan CNLS adalah :

$$\Psi = a \left( \frac{2}{r} \right)^{1/2} \exp i \left\{ \frac{1}{2} sx - \left( \frac{1}{4} s^2 - a^2 \right) t \right\} \text{sech} a (x - st) \quad (15)$$

Dengan  $s$  merupakan kecepatan pada soliton. Pada pengkomputasiannya kami memilih nilai  $a=1$ ,  $r = 1$ ,  $s = 1/4$  dan tidak menggunakan faktor eksponensial (karena perbedaan dimensi matriks). Berikut ini merupakan hasil yang didapatkan :



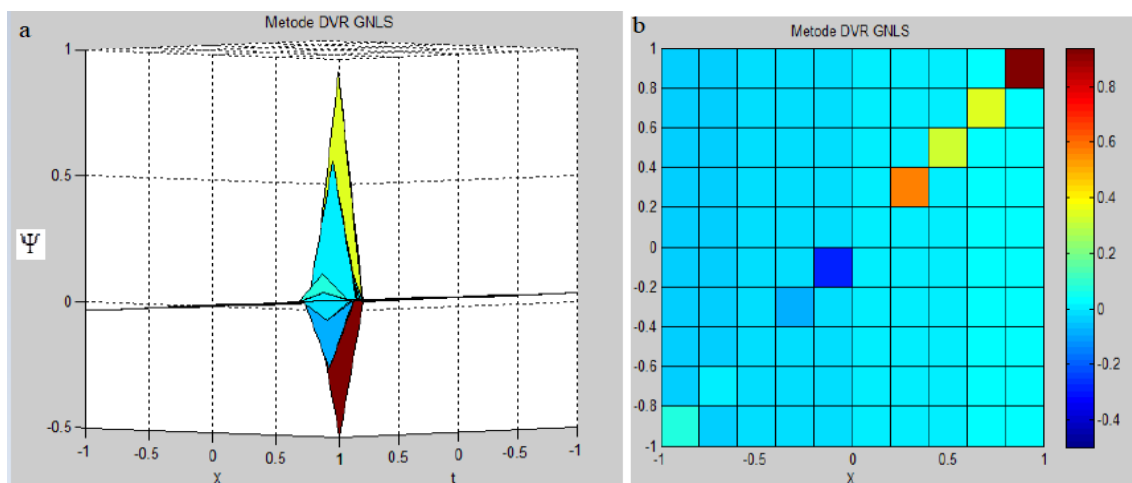
**Gambar 2** Grafik CNLS tanpa faktor eksponensial untuk  $a = 1, r = 1, s = 1/4$

Dari Gambar 2 dapat dilihat bahwa bentuk yang didapat juga merupakan soliton *onsite* (sama seperti Gambar 1)). Terlihat bahwa perbandingan dari 2 gambar tersebut adalah panjang penjalaran soliton sepanjang sumbu- $x$ . Pada Gambar 1 didapatkan bahwa penjalaran soliton pada sumbu- $x$  berada pada rentang -0.2 sampai 0.2, sedangkan pada Gambar 2 penjalaran memiliki rentang dari -6 sampai 6. Perbedaan ini dapat terjadi karena beberapa alasan, salah satunya adalah karena perbedaan inisialisasi pada setiap rentang nilai konstanta yang ada. Inisialisasi pada penelitian penggunaan metode DVR ini dibatasi dari nilai -1 sampai 1.

### 3.3 Simulasi pada GNLS (*Generalized Nonlinear Schrödinger*)

$$\text{Persamaan NLS ini memiliki nilai : } f(x,t) = -4(x-2t)^2 + \left( \exp(-2(x-2t)^2) \right)^2$$

Hasil yang didapatkan dari simulasi ini adalah sebagai berikut :



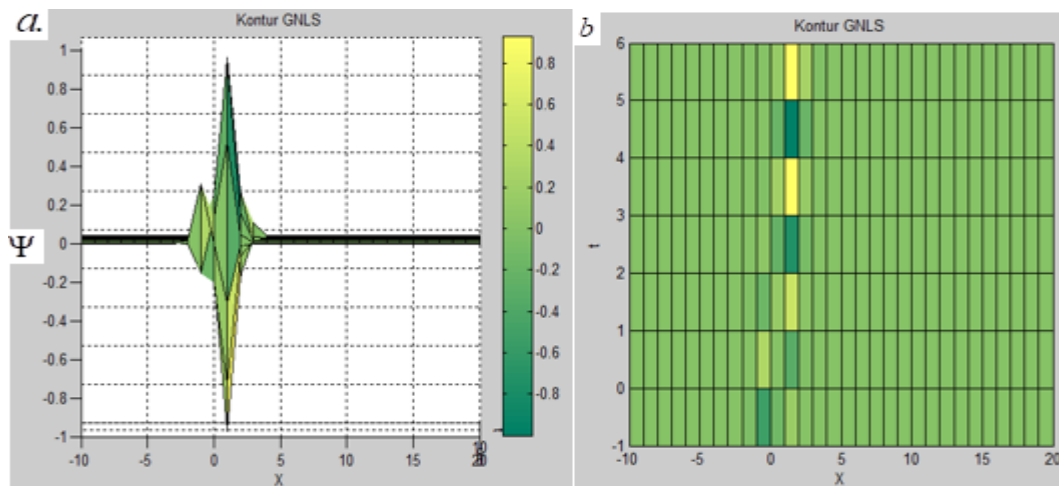
**Gambar 3** Metode DVR pada GNLS, tampak : (a) vertikal, (b) horizontal

Pada Gambar 3 dapat dilihat bahwa nilai dari  $\Psi$  bernilai positif dan negatif, nilai negatif tersebut didapatkan dari  $f(x,t)$  yang mengandung eksponensial. Dalam pengkomputasiannya digunakan kondisi batas pada keadaan Chebyshev yaitu  $x \in [-1,1]$ . Dari hasil yang didapatkan, penjalaran terjadi pada nilai  $t = -1$  sampai 1.

Selanjutnya akan disimulasikan solusi eksak dari persamaan GNLS, diketahui bahwa solusi eksak adalah sebagai berikut :

$$\Psi = \exp(-(x-st)^2 + i(kx - \omega t)) \quad (16)$$

dengan  $\omega$  merupakan kecepatan sudut,  $k$  merupakan bilangan gelombang. Pada simulasinya digunakan  $s = 1/4$ ,  $k = -1$  dan  $\omega = 3$ . Berikut hasil yang didapatkan :



**Gambar 4** Simulasi solusi eksak GNL, tampak: (a) vertikal, (b) horizontal untuk  $s = 1/4$ ,  $k = -1$  dan  $\omega = 3$

Bentuk dari Gambar 4 dan Gambar 3 hampir sama, terlihat bahwa nilai  $\Psi$  yang didapatkan akan meningkat seiring dengan meningkatnya nilai  $t$ , hanya saja nilai  $t$  pada solusi eksak cukup lama, yaitu dari  $t = -1$  sampai  $t = 6$ . Perbedaan ini dapat terjadi karena inisialisasi awal.

Dari perbandingan antara metode DVR dengan solusi eksak dari persamaan NLS (CNLS dan GNL) umumnya memiliki bentuk yang sama, hanya saja berbeda rentang penjalaran. Perbedaan tersebut diakibatkan karena inisialisasi awal dan nilai matriks yang berbeda. Inisialisasi pada penelitian penggunaan metode DVR ini dibatasi dari nilai -1 sampai 1.

#### 4. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan bahwa metode DVR dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan NLS. Hasil simulasi dari metode ini memiliki bentuk yang hampir sama dengan solusi eksak pada beberapa kasus nonlinear. Pada kasus CNLS menggunakan metode DVR dihasilkan salah satu jenis soliton, yaitu soliton *onsite*. Namun nilai rentang penjalaran soliton menggunakan metode DVR lebih kecil daripada solusi eksak. Hal tersebut disebabkan karena perbedaan dimensi matriks antara solusi eksak dan solusi dari metode DVR dan juga adanya batasan yang ditentukan pada saat inisialisasi awal yaitu pada rentang Chebyshev dimana  $x \in [-1,1]$ .

#### DAFTAR PUSTAKA

- Agrawal, G. P., *Applicaton of Nonlinear Fiber Optic* (Academic Pres Inc, San Diego, 2001).
- Bao, W., Jaksch, D., Markowich, P. A., Numerical Solution of The Gross-Pitaevski Equation for Bose-Einstein Condensation, *Journal Comput. Phys.*, **186**, 318-342 (2003).
- Dag, I., A Quadratic b-Spline Finite Element method for Solving Nonlinear Schrödinger, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **174**, 247-258 (1999).
- Debnath, L., *Nonlinear Partial Differential Equations* (Springer, New York, 2012).
- Dehghan, M., Taleei, A., Numerical Solution of Nonlinear Schrödinger Equation by Using Time-Space Pseudo-Spectral Method, *Wiley Interscience*, **26**, 979-992 (2009).
- Delfour, M., Fortin, M., Payre, G., Finite Difference Solutions of a Nonlinear Schrödinger Equation, *Journal Comput. Physics*, **44**, 277-288 (1981).

- El-Baghdady, G., El-Azab, M.S., Chebyshev-Gauss-Lobatto Pseudo-Spectral Method for One-Dimensional Advection-Diffusion Equation with Variable Coefficients, *Sohag Journal Math.*, **3**, 7-14 (2016).
- Fordy A.P., *Soliton Theory: A Survey Of Result* (Manchester University Press, Manchester, (1990).
- Harris, D. O., Engerholm, G. G., dan Gwinn, W. D., Calculation of Matrix Elements For One-Dimensional Quantum-Mechanical Problems and the Application to Anharmonic Oscilator, *The Journal of Chemical Physics*, **43**, 1515-1517 (1965).
- Stenflo, L., Yu, M. Y., Nonlinear Wave Modulation in a Cylindrical Plasma, *IEEE Trans Plasma Sci*, **25**, 1155-1157 (1997).
- Sulem, C., Sulem, P. L., *The Nonlinear Schrödinger Equation : Self-Focusing and Wave Collapse* (Springer, New York, 1999).
- Theodorakopoulos, N., *Nonlinear Physics* (Konstanz University, German, 2006).
- Wadati, M., *Introduction to Soliton* (University of Tokyo, Tokyo, 2001).
- Zhou, Q., Ekici, M., dan Sonmezoglu, A., The Inetigation of Solitons of the Coupled Sine-Gordon Equation in Nonlinear Optics, *Journal of Modern Optics*, **64**, 1677-1682. (2017).