Evolusi Soliton pada Model Frenkel-Kontorova yang Tereduksi ke Persamaan Sine-Gordon Melalui Pendekatan Limit Kontinu

Boy Angga[1,*], Zulfi Abdullah[1], Mahdhivan Syafwan[2]
[1]Jurusan Fisika Universitas Andalas
[2]Jurusan Matematika Universitas Andalas
**abh.phy@gmail.com*

ABSTRAK

Model Frenkel-Kontorova telah direduksi ke persamaan Sine-Gordon melalui pendekatan limit kontinu. Solusi persamaan Sine-Gordon diselesaikan menggunakan transformasi Baecklund dan didapatkan 3 soliton yaitu *kink*, *antikink* dan *breather*. Akan tetapi, transformasi Bäcklund tidak dapat memberikan gambaran bagaimana evolusi soliton yaitu dari keadaan *solitonlike* menuju ke keadaan *steady*. Metode yang digunakan untuk menerangkan evolusi soliton adalah aproksimasi dengan memanfaatkan teorema Noether (konsep energi konservatif). Hasil menunjukkan bahwa keadaan *solitonlike* selalu tidak stabil selama proses evolusi berlangsung.
Kata Kunci: evolusi soliton, limit kontinu, model Frenkel-Kontorova, persamaan Sine-Gordon, soliton, *solitonlike*, teorema Noether.

ABSTRACT

Frenkel-Kontorova model has been reduced into Sine-Gordon equation using continuum limit approach. Solution of Sine-Gordon equation is solved using Baecklund transformation and 3 soliton i.e kink, antikink and breather are obtained. However, Bäcklund transformation can not explain the idea of soliton evolution from solitonlike towards steady state one. The method used to explain the evolution of the soliton is an aproximation using Noether theorem (concept of conservative energy). Results showed that the state of the solitonlike is always unstable during the procces of evolution.
Keywords: soliton evolution, limit continuum, Frenkel-Kontorova model, Sine-Gordon equation, soliton, solitonlike, Noether theorem.

I. PENDAHULUAN

Model Frenkel-Kontorova (FK) merupakan salah satu model atom klasik yang menjelaskan sistem dinamika rantai atom secara sederhana. Dalam sistem ini, setiap atom berinteraksi dengan tetangga terdekatnya dan interaksi ini dipengaruhi oleh potensial sinusoidal. Kesederhanaan model FK terletak pada adanya asumsi gaya interatom, potensial sinusoidal dan memenuhi hukum-hukum pada mekanika klasik. Unggulnya, model ini dapat direduksi menjadi persamaan Sine-Gordon (SG) melalui pendekatan limit kontinu. Meskipun model FK tak terpisahkan dalam bentuk diskrit dan tak dapat diintegralkan, akan tetapi di dalam kajian fisika, model FK sering dipahami sebagai dinamika nonlinier yang tereduksi ke persamaan SG (Braun dan Kivshar, 1998).

Persamaan SG adalah persamaan diferensial parsial nonlinier yang memiliki multi solusi. Hal terpenting untuk mendeskripsikan pergerakan (dinamika) dan kelakuan atom pada sistem model FK adalah mencari solusi persamaan SG tersebut. Beberapa metode analitik untuk mendapatkan solusi persamaan SG di antaranya separasi variabel (Jia-ren, dkk., 1997), metode tangen hiperbolikus (tanh) (Wazwaz, 2005), metode Jacobi eliptik (Fan dan Zhang, 2002), transformasi *inverse scattering* (Kälbermann, 2008), metode *homotopy analysis* (Yucel, 2008), metode *homotopy perturbation* (Jin, 2009; Sadighi, dkk., 2009), metode Hirota (Wazwaz, 2011). Selain itu, ada metode Bernoulli (Zhao, 2014), transformasi Bäcklund (Sayed, 2013), transformasi Laplace (Nam dan Kim, 2014), serta masih banyak lagi.

Semua metode memiliki kelebihan dan kekurangan masing-masing tergantung pada geometri yang diterapkan. Transformasi Baecklund merupakan metode yang paling populer digunakan dalam menyelesaikan permasalahan nonlinier karena metode ini dikaji dalam geometri diferensial yaitu permukaan dengan kurvatur Gaussian berkonstanta negatif (*pseudospherical*). Konstruksi geometri ini melahirkan *pseudospherical* baru dari *pseudospherical* awal (Hermann, 1977). Dalam kata lain, jika solusi persamaan diferensial parsial nonlinier sudah didapati, maka akan didapati solusi baru dengan menggunakan solusi yang didapati sebelumnya. Geometri ini menjamin adanya solusi analitik yang tepat dari persamaan diferensial parsial nonlinier (Gablinger, 2007). Tidak hanya itu, TB relatif lebih mudah diterapkan dan dapat membuat persamaan diferensial parsial nonlinier menjadi *integrable* (dapat diintegralkan), termasuk persamaan SG (Rogers dan Schief, 2002). Dengan beberapa kelebihan yang telah disebutkan, penelitian Braun dan Kivshar menjadi landasan dalam penelitian ini. Namun, dalam publikasinya, Braun dan Kivshar tidak memberikan dengan rinci seluruh penjabaran matematis model FK meliputi persamaan diskrit SG dan solusinya, pendekatan limit kontinu sehingga menghasilkan persamaan SG dan solusinya sehingga penelitian ini juga ditujukan untuk melengkapi penelitian tersebut.

Salah satu solusi analitik dari persamaan SG adalah soliton yaitu gelombang nonlinier terlokalisasi yang memenuhi dua sifat, (1) dapat mempertahankan bentuknya saat merambat pada kecepatan konstan, (2) dapat berinteraksi dengan soliton lain namun tetap mempertahankan identitasnya semula (Peyrard dan Dauxois, 2004; Drazin dan Johnson, 1989). Solusi analitik dari persamaan SG tersebut menggambarkan eksitasi dasar model atom FK yaitu *phonon* (getaran atom-atom), *kink* (soliton topologi) (Braun dan Kivshar, 1998).

Transformasi Baecklund hanya menawarkan soliton stabil/mantap (*steady*) tetapi tidak dapat memberikan gambaran tentang evolusi soliton yaitu dari keadaan tak stabil (*solitonlike*) menuju ke keadaan *steady*. Menurut penelitian Smyth dan Worthy (1999), sebelum terbentuk soliton *steady*, terjadi pelepasan energi. Adanya pelepasan energi membuat *solitonlike* menuju ke keadaan *steady*. Oleh karena itu, untuk menerangkan evolusi digunakan metode aproksimasi dengan memanfaatkan teorema Noether yaitu teorema yang meyatakan konservasi dari suatu sistem dengan Lagrangian, L atau Hamiltonian, H. Teorema Noether bukanlah teorema baru melainkan generalisasi dari suatu sistem yang dinyatakan oleh suatu Lagrangian atau Hamiltonian yang diturunkan dari hukum kedua Newton. Teorema ini menawarkan cara yang lebih mudah untuk mengatasi masalah yang sulit dalam fisika. Salah satu keuntungan menggunakan teorema ini adalah berlakunya prinsip hukum kekekalan energi mekanik (Neuenschwander, 2011) yang konsisten dengan penelitian Smyth dan Worthy yaitu energi selama dan setelah evolusi berlangsung tetap sama, sehingga penelitian Smyth dan Worthy juga menjadi landasan dalam penelitian ini untuk menerangkan evolusi soliton. Namun, dalam publikasinya, Smyth dan Worthy tidak memberikan penjabaran matematis secara rinci, sehingga penelitian ini ditujukan untuk melengkapi penelitian tersebut meliputi energi yang dilepaskan selama evolusi soliton berlangsung dan solusi metode aproksimasi. Dalam penelitian ini, semua solusi dan evolusi *kink* dari persamaan SG yang didapatkan divisualisasikan menggunakan perangkat lunak *Wolfram Mathematica* 10.

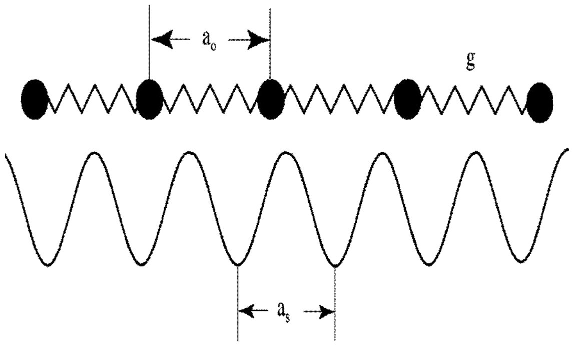
II. METODE

Asumsi-asumsi pada model atom FK yaitu gaya interaksi antar atom dengan tetangga terdekatnya dan potensial sinusoidal diterjemahkan ke dalam bahasa matematis, kemudian dicari Lagrangian dan persamaan gerak Lagrange sehingga menghasilkan persamaan SG diskrit. Selanjutnya, persamaan gerak Lagrange dari model atom FK diasumsikan jarak antar atomnya sangat kecil sekali $(\Delta x \to 0)$ sehingga dapat didekati melalui pendekatan limit kontinu yang menghasilkan persamaan SG kontinu. Selanjutnya, persamaan SG dicari solusinya menggunakan transformasi Baecklund (TB). Oleh karena TB hanya menawarkan soliton stabil, maka untuk menerangkan evolusi soliton, digunakan metode aproksimasi dari *kink* (*solitonlike*) dengan memanfaatkan teorema Noether (konsep energi konservatif) sehingga didapati solusi dari metode aproksimasi tersebut. Solusi dari persamaan SG kontinu dan metode aproksimasi divisualisasikan menggunakan perangkat lunak *Wolfram Mathematica* 10.

III. HASIL DAN DISKUSI

3.1 Persamaan Sine-Gordon pada Model Frenkel-Kontorova (FK)

Model Frenkel-Kontorova (FK) merupakan salah satu model dinamika rantai atom klasik yang secara skematis ditunjukkan oleh Gambar 1



Gambar 1 Skema model Frenkel-Kontorova

Model FK memiliki energi kinetik yang diberikan oleh

$$K = \frac{m_a}{2}\sum_n \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 \tag{1}$$

m_a dan x_n masing-masing adalah massa atom dan koordinat atom ke-*n*. Energi potensial terdiri dari dua bagian yaitu interaksi antar tetangga terdekat dan potensial pegganggu, masing-masing diberikan oleh

$$U_{\text{int}} = \frac{g}{2}\sum_n \left(x_{n+1} - x_n - a_0\right)^2 \tag{2}$$

$$U_{sub} = \frac{\varepsilon_s}{2}\sum_n \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x_n}{a_s}\right)\right] \tag{3}$$

dimana ε_s amplitudo, a_s perioda, g konstanta elastisitas dan a_0 jarak antar atom pada saat kesetimbangan. Dari Persamaan 1, Persamaan 2 dan Persamaan 3, Lagrangian model FK diberikan oleh

$$L = \frac{m_a}{2}\sum_n \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 - \frac{\varepsilon_s}{2}\sum_n \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x_n}{a_s}\right)\right] - \frac{g}{2}\sum_n \left(x_{n+1} - x_n - a_0\right)^2 \tag{4}$$

Dari Persamaan 4, persamaan gerak Lagrange model FK diberikan oleh

$$\ddot{x}_n + \sin x_n - g\left(x_{n+1} - x_{n-1} - 2x_n\right) = 0 \tag{5}$$

Persamaan 5 adalah persamaan Sine-Gordon dalam bentuk diskrit. Ketika atom dipengaruhi oleh energi potensial, maka atom bergeser sejauh u_n sehingga posisi atom dapat dinyatakan sebagai $x_n \to na_s + u_n$, sehingga Persamaan 5 dapat ditulis ulang menjadi

$$\ddot{u}_n + u_n - g\left(u_{n+1} - u_{n-1} - 2u_n\right) = 0 \tag{6}$$

Persamaan 6 mendeskripsikan keberadaan *phonon* $(a_s \ll 1)$. Munculnya *phonon* disebabkan oleh getaran-getaran atom yang dapat meyebabkan atom-atom antar tetangga terdekat saling bertumbukan dan tumbukan yang terjadi bersifat *inelastic* yaitu energi sebelum dan sesudah tumbukan tidak sama sehingga tumbukan ini melepaskan energi dan energi yang dilepas itulah yang disebut dengan *phonon*.

Ketika jarak antar atom sangat kecil sekali $(\Delta x \to 0)$, Persamaan 5 dapat didekati melalui pendekatan limit kontinu yang diberikan oleh

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7}$$

Persamaan 7 disubstitusikan ke Persamaan 5 kemudian dinormalisasikan, sehingga didapatkan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0 \tag{8}$$

Persamaan 8 adalah persamaan SG.

3.2 Solusi Persamaan Sine-Gordon

Untuk mendapatkan solusi persamaan Sine-Gordon, digunakan transformasi Baecklund yang diberikan oleh (Rogers dan Shadwick, 1982)

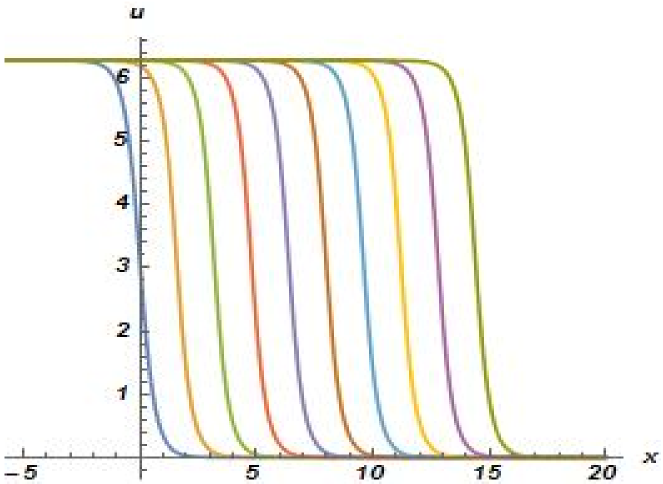
$$\frac{1}{2}(u_1+u_2)_\xi = \alpha \sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\right), \xi = \frac{x+t}{2}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}(u_1-u_2)_\eta = \frac{1}{\alpha}\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right), \eta = \frac{x-t}{2}, \tag{10}$$

dengan $\alpha = -a$ yang merupakan parameter transformasi. Misalkan $u_1 = 0$ pada Persamaan 9 dan Persamaan 10, sehingga solusi Persamaan 8 diberikan oleh

$$u_2 = 4\tan^{-1}\left[\exp\left(-\left[\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right]\right)\right], v = \frac{1-a^2}{1+a^2}, \tag{11}$$

Persamaan 10 disebut dengan kink (Gambar 2). Terbentuknya kink pada atom model FK disebabkan oleh adanya energi yang merambat melalui rantai atom tersebut. Energi ini berasal dari interaksi antar tetangga terdekat dan energi potensial pengganggu. Terlihat pada Gambar 2, kink tersebut berjalan dengan kecepatan konstan dalam arah positif sumbu x dan tidak mengalami perubahan bentuk. Dalam kata lain, kink tetap mempertahankan bentuk dan keadaannya.



Gambar 2 kink pada $v = 0.8$

3.3 Evolusi *Kink*

Untuk mendapatkan aproksimasi yang mendeskripsikan evolusi soliton dengan analogi pada Persamaan 10, diasumsikan bentuk (Smyth dan Worthy, 1999)

$$u = 4\tan^{-1}\left[\exp\left(-\frac{x-\xi(t)}{w(t)}\right)\right], \tag{12}$$

dimana $w(t)$ adalah lebar pulsa bergantung waktu dan kecepatan pulsa $\xi'(t)$. Persamaan SG memiliki hamiltonian yang diberikan oleh (Vladamir dan Tijana, 2013)

$$H_{SG} = \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + 1 - \cos u. \tag{13}$$

Hamiltonian rata-rata didefinisikan sebagai (Smyth dan Worthy, 1999)

$$H_{AV} = \int_{-\infty}^{\infty} H_{SG}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2\,dx + \int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos u)\,dx, \tag{14}$$

dengan menyelesaikan integrasi pada Persamaan 14, maka didapatkan

$$H_{AV} = \frac{\pi^2}{3}\frac{w'^2}{w} + 4\frac{U^2}{w} + \frac{4}{w} + 4w. \tag{15}$$

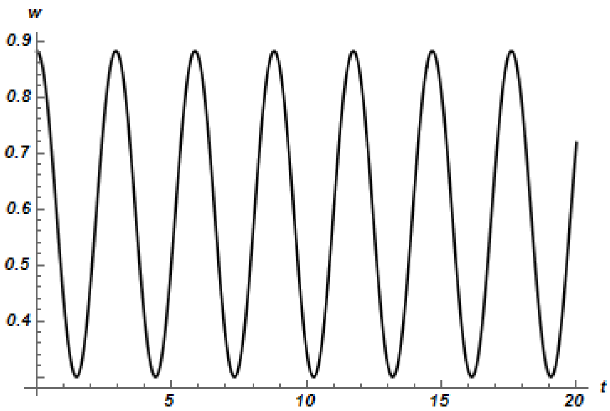
Dengan menggunakan teorema Noether, energi invarian di bawah translai $t \rightarrow t + \Delta t$ atau dengan kata lain $\frac{dH_{AV}}{dt} = 0,$ sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\pi^2}{3}\frac{w'^2}{w} + 4\frac{U^2}{w} + \frac{4}{w} + 4w\right] = 0. \tag{16}$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan Persamaan 16 dan dengan syarat awal $w(0) = w_0, w'(0) = 0$ dan $U(0) = U_0$ didapatkan parameter lebar pulsa bergantung waktu yang dinyatakan sebagai

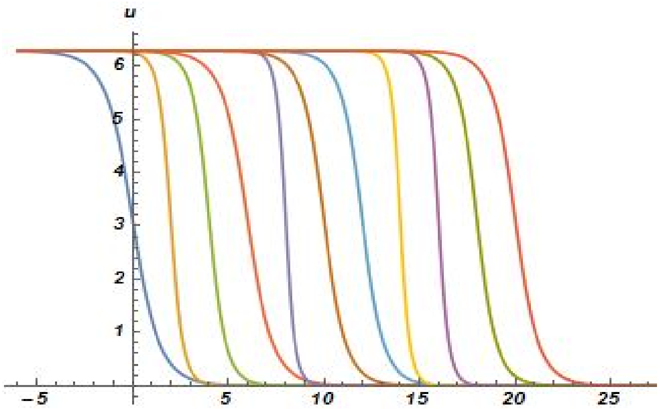
$$w = \frac{\left(U_0^2 + 1 + w_0^2\right)w_0}{2\left(U_0^2 + w_0^2\right)} - \frac{\left(U_0^2 - 1 + w_0^2\right)w_0}{2\left(U_0^2 + w_0^2\right)}\cos\left[\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{1 + \frac{U_0^2}{w_0^2}}t\right] \tag{17}$$

Lebar pulsa *w* selama evolusi berlangsung yang diberikan oleh Persamaan 17 dapat dilihat pada Gambar 3, terlihat bahwa lebar pulsa bersifat periodik dan selalu bernilai positif. Hal ini mengindikasikan selama evolusi berlangsung, amplitudo *kink* tidak pernah bernilai negatif.



Gambar 3 Grafik lebar pulsa *w* terhadap waktu *t*

Untuk keadaan *kink* selama evolusi berlangsung dapat dilihat pada Gambar 4 (solusi Persamaan 12), terlihat bahwa lebar pulsa selalu berubah-ubah dan keadaan *kink* selalu tidak stabil. Hal ini disebabkan oleh adanya pelepasan energi oleh atom-atom yang bergetar dan atom-atom tersebut saling bertumbukan. Adanya pelepasan energi ini membuat sistem atom model FK bergerak secara tak beraturan dan energi yang dilepaskannya pun tidak sama selama proses evolusi berlangsung.



Gambar 4 keadaan *kink* selama evolusi berlangsung

IV. KESIMPULAN

Model matematis FK dapat direduksi ke persamaan SG melalui pendekatan limit kontinu. Solusi persamaan SG menunjukkan adanya *kink* yaitu soliton dalam keadaan stabil. Keadaan *kink* selama evolusi (*solitonlike*) berlangsung selalu tidak stabil.

DAFTAR PUSTAKA

Braun, O. M. dan Kivshar, Y. S., Physics Report, 6-12 (1998).

Drazin, P.G., dan Johnson, R.S., *Solitons: An Introduction* (Cambridge University Press, London, 1989), hal 1-7.

Fan, E. dan Zhang, J., Physics Letters A, 383-392 (2002).

Hermann, R., *The Geometry of Nonlinear Differential Equations, Bäcklund Transformations and Solitons* (Math. Sci. Press, United States of Amrica, 1977), hal 1-9.

Jia-ren, Y., Yi, T. dan Zhen-hua, C., Chinese Physics Letters **14**, 671-674 (1997).

Jin, L., Int. J. Contemp. Math. Sciences **4**, 225-228 (2009)

Kalbermann, G., arXiv:cond-mat/0408198v2[cond-mat.other], 1-5 (2008)

Nam, S. dan Kim, H., App. Mat. Sci. **8**, 4433-4440 (2014).

Neuenscwander, D.E., *Emmy Noether's Wonderful Theorem* (John Hopkins University Press, USA, 2011), hal 72-75.

Peyrard, M., dan Dauxois, T., *Physics of Solitons* (John Hopkins University Press, USA, 2010), hal 3-8.

Rogers C. dan Shadwick, W.F., *Baecklund Transformation and Their Applications* (Academic Press, Inc., New York, 1982), hal 12-16.

Sadighi, A., Ganji, D.D. dan Ganjavi, B., Research Note **16**, 189-195 (2009)

Sayed, S.M., App. Math. and Comp., 1-7 (2013)

Smyth, N.F. dan Worthy, A.L., Physical Review E **60**, 2330-2336 (1999).

Vladimir, G.I. dan Tijana, T.I., arXiv: 1305.0613VI[q-bio.OT], 6-9 (2013).

Wazwaz, A.M., App. Math. and Comp. **167,** 1196-1210 (2005).

Wazwaz, A.M., App. Math. and Comp. **30**, 925-934 (2011)

Yucel, U., App. Math. and Comp. **203**, 387-395 (2008)

Zhao, Y.N., App. Math. and Comp., 1-5 (2014)